Capitulo 4

Métodos de Solución de Ecuaciones

Introducción

Este tema trata sobre el problema de encontrar raíces reales de una ecuación con una incógnita , se desea hallar los números reales r1, r2, r3, ..., r n comprendidos en un cierto intervalo que satisfaga la ecuación , tal que para i = 1,2,... , n. El intervalo que se busca puede ser cerrado o no y su amplitud puede incluso ser infinita.

La importancia de los métodos numéricos que resuelven este problema viene dada por la frecuencia que se presenta el problema en cualquier rama de la ciencia o de la técnica y lo limitados que resultan los métodos analíticos de solución.

EJEMPLO

Bajo ciertas suposiciones, se puede probar que muchas poblaciones de animales y plantas crecen según el modelo logístico.

$$P(t) = Pl / [1- ce^{-kt}]$$

Donde Pl (población límite), c y k, son parámetros; t es el tiempo y p(t) la población en el instante t. Si se conoce la población en tres instantes se puede determinar los parámetros y con ello la función logística correspondiente. Por ejemplo, si:

$$p1 = p(t1) = Pl / [1- ce^{-kt1}]$$
$$p2 = p(t2) = Pl / [1- ce^{-kt2}]$$
$$p3 = p(t3) = Pl / [1- ce^{-kt3}]$$

Eliminando de este sistema de ecuaciones las incógnitas Pl y c , se obtiene

$$(p2 – p1) (p3\ e^{–kt3} – p2\ e^{–kt2}) - (p3 – p2) (p2\ e^{–kt2} – p1\ e^{–kt1})$$

que es una ecuación con la única incógnita k. La resolución de esta ecuación por los métodos algebraicos es, casi, imposible.

Separación de Raíces

Sea f(x) = 0 una ecuación cuyas raíces en el intervalo I se quieren hallar, separar raíces implica encontrar subintervalos inconexos (a1, b1), (a2, b2) , . . . , (an , bn)de I tales que cada uno de ellos contenga una y sólo una raíz de la ecuación.

EL MÉTODO GRAFICO

La técnica más elemental para la separación de raíces es el método gráfico, que utiliza el conocido hecho de que las raíces de f (x) = 0 son las abscisas de los puntos en que la gráfica de la función y = f (x) corta al eje x.

Este método era recomendable cuando f (x) era fácil de graficar. Pero ahora se puede generar una gráfica fácilmente y en un intervalo definido por el usuario.

EJEMPLO

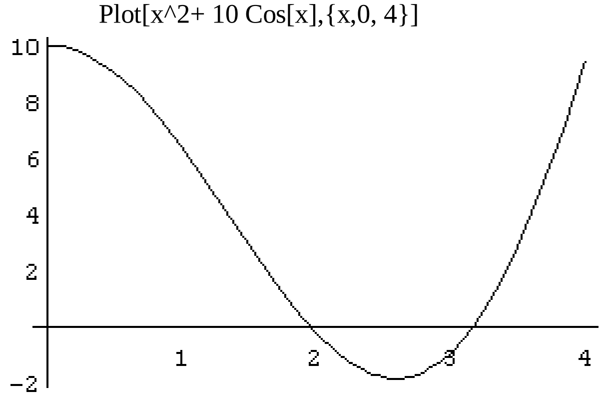
Separar las raices de la ecuación $x^2 + 10 \cos x = 0$

En Mathematica

```
FindRoot[x^2 == - 10 Cos[x],{x,0,2}]
        {x -> 1.96887}

FindRoot[x^2 == - 10 Cos[x],{x,0,4}]
FindRoot::frsec:   Secant method failed to converge tothe prescribed accuracy after 15 iterations.
        {x -> 3.24872}

Plot[x^2+ 10 Cos[x],{x,0, 4}]
```



-Graphics-

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ALGEBRA

Una ecuación algebraica de grado n tiene n raíces reales o complejas, si cada raíz se cuanta tantas veces según sea su multiplicidad.

Este teorema hace posible establecer una cota superior del número de raíces. Una ecuación algebraica de grado n tiene coma máximo n raíces reales”

EJEMPLO

Se puede afirmar que la ecuación $x^5 + 4x^4 – x^3 – 10x^2 – 6x – 36 = 0$ tiene a lo más cinco raíces reales, ya que es de quinto grado.

REGLA DE DESCARTES

El número de raíces reales positivas de una ecuación algebraica

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} – a_3x^{n-3} + a_{n-1}x + a_n = 0$$

es igual al número de cambios de signo en la sucesión de los coeficientes o menor que ese número en un entero par.

EJEMPLO

La ecuación $x^4 + 3x^2 – 5x + 8 = 0$

Tiene coeficientes $+1 \quad +3 \quad -5 \quad +8$

Existen 2 cambios de signo, por lo tanto el número de raíces positivas de la ecuación será dos o ninguna.

EJEMPLO

La ecuación $x^5 - x^4 + 3x^3 – 8x^2 + x - 9 = 0$, tiene cinco cambios de signo en la sucesión de los coeficientes, luego el número de raíces positivas será de cinco, tres, uno.

FORMULA DE LAGRANGE PARA ACOTAR RAICES

Si en la ecuación $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} – a_3x^{n-3} + a_{n-1}x + a_n = 0$, con $a_0 > 0$ se llama:

B: valor absoluto del coef. Negativo con mayor valor absoluto

a k: primer coeficiente negativo contando desde la izquierda

entonces todas las raíces reales positivas de la ecuación, is existen, son menores que el número

$$R = 1+ [B / a_0]^{1/k}$$

EJEMPLO

En la ecuación $x^3 - 9x^2 – 9x + 19 = 0$ se tiene $a_0 = 1$; $a_1 = -9$; $a_2 = -9$; $a_3 = 19$

$B = | -9 | = 9$; $k = 1$ por a_1 ; $a_0 = 1$

$R = 1+ [9 / 1]^{1/1} = 10$

Entonces, todas las raíces positivas están comprendidas en el intervalo [0 , 10], y existen 2 o ninguna raíz positiva.

Para las raíces negativas, se cambia x por – x

$- x^3 - 9x^2 + 9x + 19 = 0$ o $x^3 + 9x^2 - 9x - 19 = 0$; se tiene $a_0 = 1$; $a_1 = 9$; $a_2 = -9$; $a_3 = -19$

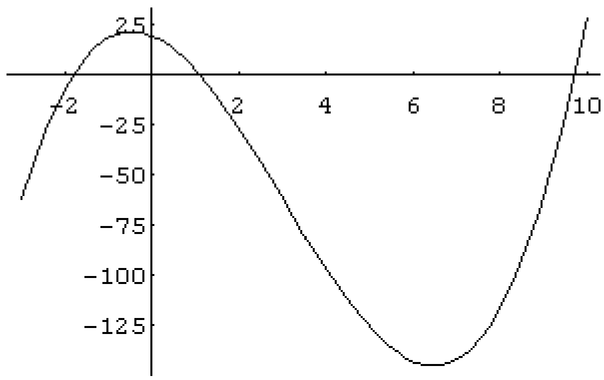
$B = | -19 | = 19$; $k = 3$ por a_3 ; $a_0 = 1$

$$R = 1+ [19 / 1]^{1/3} = \sim 3.6684 = 4$$

Se puede afirmar que tiene una raíz negativa en el intervalo [- 3 , 0]

* Realizando el cálculo en Mathematica se obtiene las siguientes raíces

```
NRoots[x^3 -9x^2 - 9 x +  19 == 0,x]
x == -1.80626 || x == 1.08169 ||   x == 9.72458
Plot[x^3 -9x^2 - 9 x +  19 , {x,-3,10}]
```



Método de la Bisección

Sea f(x) = 0 y un intervalo [a, b] tales que:

En el intervalo la ecuación tiene una sola raíz x = r

1. f (x) tiene signos diferentes en a y b, es decir,
2. f (x) es continua en [a , b]

El método de la bisección consiste en hallar el signo de f (x) en el punto medio del intervalo [a,b] y decidir si la raíz, se encuentra en la mitad izquierda o derecha del intervalo. Así una de las dos mitades se desecha y con la otra se inicia una nueva búsqueda con un nuevo intervalo, hasta reducir la longitud del intervalo de búsqueda a una cantidad pequeña.

```
Sea i= 0
DO WHILE no se cumpla la condición de parada
        Sea xi = ( ai + bi )/ 2
        IF f ( xi )= 0 THEN
                        xi es exactamente la raíz buscada
        ELSE
                IF f(ai) * f (xi) < 0 THEN
                        a i+1 = ai
                        b i+1 = xi
                ELSE
                        a i+1 = xi
                        b i+1 = bi
                END
        END
Incrementar i
END
```

Convergencia Del Método

En este método se obtiene en cada paso una aproximación más confiable. Es un método convergente, ya que las aproximaciones sucesivas tienen como límite la raíz buscada, cuando el número de pasos tiende hacia infinito

así, tomando un cierto número de pasos suficientemente grande, la diferencia | xi - r | puede hacerse tan pequeña como se desee, lo cual asegura que se podrá hallara la raíz con cierta precisión.

Criterio De Parada

No basta asegurarse de la convergencia del método, sino también debe existir un criterio de parada cuando se ha alcanzado la precisión deseada, para esto es necesario contar con alguna forma de acotar el error en cada aproximación.

Si se desea obtener la raíz de para detectar la ecuación con un error absoluto menor que E, el método de la bisección se llevará a cabo hasta la iteración i, para la cual

$$\frac{b-a}{2} < E$$

Y la cantidad de iteraciones viene dada por

$$\# iter > \frac{\frac{\ln(b_0 - a_0)}{E}}{\ln(2)} - 1$$

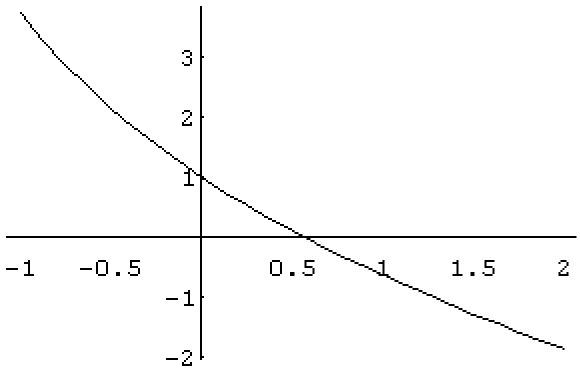
Ejemplo

Hallar con cuatro cifras decimales exactas, las raíces de la ecuación

en el intervalo [0, 1], con un error 0.00005

en Mathematica:

```
Plot[Exp[-x] -x,{x,-1,2}]
FindRoot[Exp[-x] -x==0,{x,0,1}]
{x -> 0.567144}
```



METODO BISECCION

DATOS PROBLEMAS
f(x) = exp(-X)-X
E = 0,0001
a = 0
b = 1

SOLUCION

i	a	b	Xm	f(a)*f(Xm)
0	1E-9	1.000	0,5.0	<
1	0,5.0	1.000	0,75	>
2	0,5.0	0,75	0,625	<
3	0,5.0	0,625	0,5625	<
4	0,5625	0,625	0,59375	>
5	0,5625	0,59375	0,57813	<
6	0,5625	0,57813	0,57031	<
7	0,5625	0,57031	0,56641	<
8	0,56641	0,57031	0,56836	>
9	0,56641	0,56836	0,56738	<
10	0,56641	0,56738	0,56689	<
11	0,56689	0,56738	0,56714	>
12	0,56714	0,56738	0,56726	>
13	0,56714	0,56726	0,5672	<

Solución Aproximada, x = 0,56726

METODO BISECCION

DATOS PROBLEMAS
f(x) = sqrt(x)-3*ln(x)
E = 0.001
a = 0.1
b = 2

SOLUCION

i	a	b	Xm	f(a)*f(Xm)
0	0.100	2.000	1.05	<
1	1.05	2.000	1.525	>
2	1.05	1.525	1.2875	<
3	1.2875	1.525	1.4063	>
4	1.4063	1.525	1.4656	>
5	1.4656	1.525	1.4953	>
6	1.4953	1.525	1.5102	>
7	1.4953	1.5102	1.5027	<
8	1.5027	1.5102	1.5064	>
9	1.5027	1.5064	1.5046	<
10	1.5046	1.5064	1.5055	>

Solución Aproximada, x = 1.50459

Algoritmo para el método de bisección

```
function raiz=biseccion(a,b)
e=0.0005;
k=0;
fxa=f1(a);
fxb=f1(b);
if fxa*fxb<=0
    while (abs(b-a)/2)>e
        m=(a+b)/2;
        fprintf('%5d%10.5f%10.5f%10.5f\n',k,a,b,m);
        k=k+1;
        fxm=f1(m);
        if fxa*fxm<=0
            b=m;
            fxb=fxm;
        else
            a=m;
            fxa=fxm;
        end
    end
    raiz=m;
else
    fprintf('cambiar limites');
end
```

```
function y=f1(x);
y=sqrt(x)-3*log(x);
```

```
biseccion(0.1,2)
    0   0.10000   2.00000   1.05000
    1   1.05000   2.00000   1.52500
    2   1.05000   1.52500   1.28750
    3   1.28750   1.52500   1.40625
    4   1.40625   1.52500   1.46563
    5   1.46563   1.52500   1.49531
    6   1.49531   1.52500   1.51016
    7   1.49531   1.51016   1.50273
    8   1.50273   1.51016   1.50645
    9   1.50273   1.50645   1.50459
   10   1.50459   1.50645   1.50552

ans =

    1.5055
```

El Método de la Regla Falsa

Sea definida en el intervalo [a,b] con las mismas condiciones exigidas en el método de la bisección, es decir

3. En [a,b] la ecuación tiene una sola raíz
4. La función f(x) tiene signos distintos en a y b es decir,
5. La función f(x) es continua en [a,b]

El método de la regla falsa conocido como método de las cuerdas o como método de partes proporcionales, sigue una idea parecida al método de la bisección, divide mediante un punto x i de manera que , sean proporcionales a los valores absolutos de f(x) en , respectivamente, es decir,

una vez que se obtiene x i, se analiza el signo de f(x i) y de acuerdo a este, se determina si la raíz r se encuentra en], repitiendo el proceso sucesivamente.

La fórmula que se obtiene será la siguiente

Criterios de Parada

Para elaborar un criterio de parada es necesario hallar una fórmula que dé una cota del error absoluto de x i en función de los elementos que se conoce en la i-ésima iteración. Algo que se conoce con certeza es el hecho de que la raíz r esta comprendida entre

Teorema

Sea r una raíz de la ecuación f(x) = 0 y x i una aproximación de r i, ambas localizadas en [a , b]. Sea f (x)

continua y derivable en [a, b] y para x ∈ [a , b]. Entonces

donde d representa la distancia a la cual se encontraría la raíz r de su aproximación x i en el caso de que la pendiente de la curva tomara entre ambos puntos su valor mínimo; como esta es la peor posibilidad , el número $| f (x_i) | / d$ es una cota de la distancia $| r – x_i |$, que es el error absoluto en x_i.

Criterio de parada 1

Si se desea obtener la raíz de la ecuación $f (x) = 0$ por el método de la regla falsa y se conoce

$$d = \min | f' (x) |$$

Siendo $d > 0$, entonces, para obtener la raíz con error absoluto menor que E, el proceso debe detenerse en la iteración i para la cual

Teorema

Sea $f (x)$ continua y con derivada continua y no nula en el intervalo [a , b]. Sea r una raíz de la ecuación $f(x) = 0$ comprendida en [a , b] y d y D números tales que :

$0 < d <= | f'[x] | <= D$ para $x \in [a , b]$. Entonces, si x_i y x_{i-1} son dos resultados sucesivos del método Regla Falsa, se cumple que

ahora bien, si se supone que el intervalo [a, b] se toma suficientemente pequeño y en él la derivada de $f (x)$ no sufre cambios demasiado bruscos, se cumplirá que el máximo valor D, de la derivada, no sobrepasará a dos veces su mínimo d;

Y entonces

y de ahí

Criterio de parada 2

Si se desea obtener la raíz de la ecuación $f (x) = 0$ por el método de la regla falsa y el módulo de la derivada en el intervalo [a , b] toma valores mínimo y máximo : d y D tales que $D <= 2d$, entonces Para obtener la raíz con error absoluto menor que E, el proceso debe detenerse en la iteración i para la cual

$$<E$$

Algoritmo

Llámese [a0, b0] al intervalo inicial

```
Sea error 0 = b0-a0
Sea x0 = a0 – (b0 - a0 )f(a0) /   | f(b0) – f (a0)  |
Sea i = 0
DO WHILE error i ≥ E
        Hallar f (x i)
        IF  f( x i )  = 0 THEN
                x i es exactamente la raíz buscada
                Terminar
        ELSE
                IF f (a i ) f (x i ) < 0 THEN
                        a  i+1 = a i
                        b i+1  = x i
                ELSE    a  i+1 = x i
                        b i+1  = b i
                END
        END
        Incrementar i
        x i = a i – (b i -  a i ) f(a i) /   | f(b i) – f (a i)  |
        error = | x i – x  i-1 |
END
La raíz es x i con error absoluto menor que error i
        Terminar
```

Ejemplo 1

La ecuación f (x) = Exp[- x] – x con un E = 0.00005 y en el intervalo [0, 1]

Iteración	x	f(x)	ai	bi	error
1	0.612700	-0.070814	0	1	0.612700
2	0.572181	-0.007888	0	0.612700	0.040518
3	0.567703	-0.000877	0	0.572181	0.004478
4	0.567206	-0.000098	0	0.567703	0.000498
5	0.567150	-0.000011	0	0.567206	0.000055
6	0.567144	-0.000001	0	0.567150	0.000006

El Método de Newton

También conocido como método de Newton Raphson o método de las tangentes, es uno de los más usados en el cálculo de raices debido a su gran eficiencia

Sea f(x) = 0 y un intervalo [a, b] tales que:

1. En el intervalo la ecuación tiene una sola raíz x = r

2 .f (x) tiene signos diferentes en a y b, es decir,

2. f (x) es continua y derivable dos veces en [a , b]
3. f ‘ (x) es positiva en todo el intervalo [a, b] o negativa en todo él

4. f '' (x) es positiva en todo el intervalo [a, b] o negativa en todo él

Este método consiste en tomar como aproximación xi de la raíz r al punto de la tangente a la curva que intercepta el eje X.

La aproximación inicial x0, determina en la curva y = f(x) el punto P0; la tangente a la curva es ese punto corta al eje X en un punto cuya abscisa se toma como la siguiente aproximación xi, y así sucesivamente hasta que la sucesión {x0.x1, ... , xn} converge hacia la solución r.

Algoritmo

```
Tomar una aproximación  inicial x0 en el intervalo [a, b]
Tal que x0 = a  o   x0 = b de manera que  f(x0) f''(x0 ) > 0
Error 0 = b-a
Hacer  i = 0
DO WHILE no se cumpla la condición de parada error i > = E
        Incrementar i
        x i = x i-1  -   f ( x i-1 ) /  f ' ( x i-1)
        error i = | xi – x i-1 |
END
```

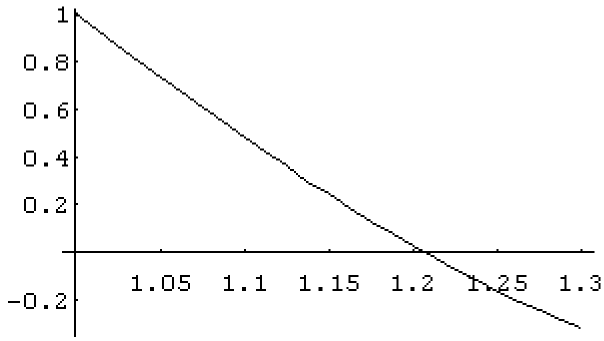
Ejemplo 1

Hallar con cuatro cifras decimales exactas, las raíces de la ecuación

2 Sin[π x]+ x = 0 en el intervalo [1,1.25], con un error 0.0005

#	x	f(x)	f ' (x)	Error
1	1,18928	0,999999	-5,283186	0,18928
2	1,205656	0,068859	-4,204679	0,016377
3	1,206035	0,00152	-4,016777	0,000378
4	1,206035	0,000004	-4,012276	0

Plot[2 Sin[Pi*x]+ x ,{x,1,1.3}]



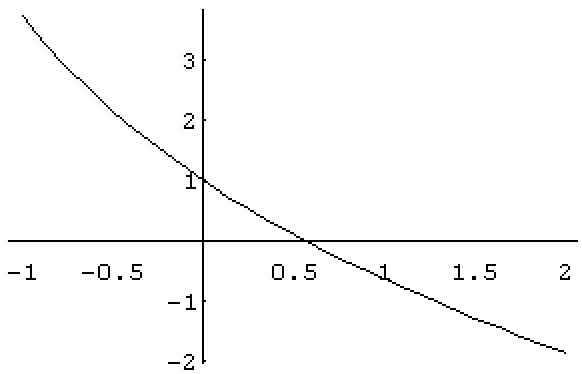
Ejemplo 2

Hallar con cuatro cifras decimales exactas, las raíces de la ecuación

e -x = x **en el intervalo [0, 1], con un error 0.00005**

en Mathematica

```
Plot[Exp[-x] -x,{x,-1,2}]
FindRoot[Exp[-x] -x==0,{x,0,1}]
{x -> 0.567144}
```



METODO DE NEWTON RAPHSON

DATOS PROBLEMAS
f(x) = exp(-X)-X
E = 0,0001
Xo = 1E-8
f´(x) = exp((-X))*(-1)-1

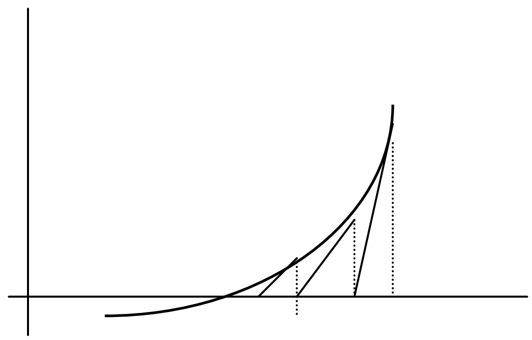
SOLUCION

i	Xi	|(Xi+1)- Xi|	Xo-(F(Xo)/F`(Xo))	g´(Xi)
0	1E-8	0.00	0,5.0	0.00
1	0,5.0	0,5.0	0,56631	0.00
2	0,56631	0,066311	0,56714	0.00
3	0,56714	0,00083216	0,56714	0.00
4	0,56714	1,2537E-7	0,56714	0.00

Solución Aproximada, x = 0,56714

Método De La Secante

Este método es una modificación del método de Newton, que elimina el uso de la derivada f(x) , sustituyendo las tangentes del método por rectas secantes a la curva y= f(x).
Este método requiere dos aproximaciones iniciales de la raíz r, ya que una secante se determina por dos puntos de la curva



La recta L, secante a la curva y = f(x) por los puntos de abscisas x 0 y x1, corta al eje x en un punto cuya abscisas se toma como x2; con x1 y x2 se determina una nueva secante L2, la cual se intersecta al eje x determinado x3, y así sucesivamente.

Este proceso genera una sucesión {x0,x1,x2,...}, la cual converge hacia la raíz x = r. De lo anterior se deduce que cada aproximación xi se obtiene de las dos anteriores, la ecuación se obtiene de la fórmula de Newton, cambiando

$$f'(x) = \frac{f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}{x_{i-1} - x_{i-2}}$$

que es la pendiente de una recta que pasa por los puntos (x i-1, f(xi-1)), (x i-2, f(xi-2))

$$\boxed{x_i = x_{i-1} - f(x_{i-1})(x_{i-1} - x_{i-2}) \ / \ [\ f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})\ ]}$$

Este método se puede describir en los siguientes pasos

Sean x0, x1 dos aproximaciones de la raíz x = r de la ecuación f(x) = 0
Sea i = 0
DO WHILE no se cumpla la condición de parada
    Sea $x_i = x_{i-1} - f(x_{i-1})(x_{i-1} - x_{i-2}) \ / \ [\ f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})\ ]$
    Incrementar i
END

Convergencia del Método

Sea f(x) = 0 una ecuación con una sola raíz x = r en el intervalo [a,b]. Sean f(x) , f ' (x) , f '' (x) continuas en [a,b] y f ' (x) no nula en dicho intervalo, entonces, tomando x0 , x1 suficientemente cerca de r, la sucesión { x0,x1, x2, ... } generada por el método de la secante, converge hacia r.

Criterio de parada

Si en el intervalo [a,b] la derivada f ' (x) no tiene cambios muy grandes, puede suponerse

$$D <= 2d$$

Y en ese caso

$$| r - x_i | <= [(2d - d) / d] * | x_i - x_{i-1} |$$

$$| r - x_i | <= | x_i - x_{i-1} |$$

Algoritmo

```
Sean x0, x1 dos aproximaciones iniciales
Sea N la máxima cantidad de iteraciones permitidas (N = 20 o N=30)
Sea error i = b – a
Sea i = 1
DO WHILE error i ≥ E
        Incrementar i
        IF i > N THEN
                El método no converge. Debe tomarse x0, x1 más próximos a la raíz
buscada y comenzar de nuevo .
                Terminar
        ELSE
                xi = xi-1 – f(xi-1)( xi-1 – xi-2 ) / [ f(xi-1) – f(xi-2) ]; error i = | xi – xi-1 |
        END
END
La raíz buscada es aproximadamente x i con error absoluto menor que error i
Terminar
```

Desventajas

El mayor inconveniente del método es la posibilidad de no convergencia a la raíz de la ecuación si las aproximaciones x0 y x1 no están suficientemente cerca de ella. Es decir a veces no se obtienen intervalos que encierran a la raíz buscada , lo cual hace que el acotamiento del error no sea completamente seguro

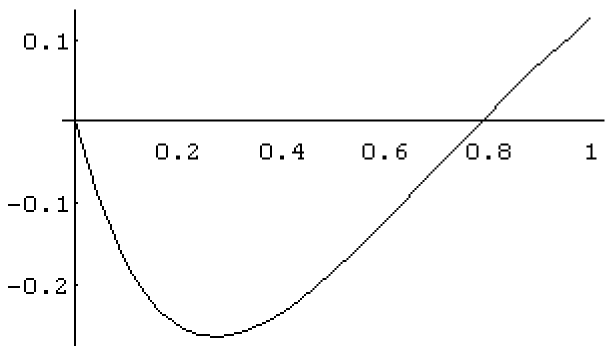
Ejemplo 1

Sea f(x) = 3.36 e –3k – 3.84 e –2k + 0.48 = 0, definida en el intervalo [0.5, 1]

Utilizando el método de la secante con x0 = 0.5 y x1 = 1, con cinco cifras decimales, se obtiene

Iter	x	f(x)	x1	x2	Error
1	0.794554	0.006060	0.500000	1.000000	0.500000
2	0.784310	- 0.000494	1.000000	0.794554	0.205446
3	0.785082	0.000001	0.794554	0.784310	0.010244
4	0.785080	0.000000	0.784310	0.785082	0.000002

Plot[3.36 Exp[-3k]-3.84 Exp[-2k]+0.48,{k,0,1}]



-Graphics-

Ejemplo 2

Hallar con cuatro cifras decimales exactas, las raíces de la ecuación

e -x = x en el intervalo [0, 1], con un error 0.00005

en Mathematica

```
Plot[Exp[-x] -x,{x,-1,2}]
FindRoot[Exp[-x] -x==0,{x,0,1}]
{x -> 0.567144}
```

```
METODO SECANTE
              DATOS PROBLEMA
              f(x) = exp(-X)-X
              E = 0,0001
              a = 0
              b = 1
              SOLUCION
               i             Xi                |Xi+1 - Xi|
              __________________________________________________

              0              1E-9                  0.00
              1              1.000                 0.00
              2              0,6127                0,3873
              3              0,56384               0,048861
              4              0,56717               0,003332
              5              0,56714               2,7052E-5
              __________________________________________________

              Solución Aproximada, x = 0,56714
```

```
METODO SECANTE
       DATOS PROBLEMA
              f(x) = sqrt(x)-3*ln(x)
              E = 0.001
              a = 0.1
              b = 2
              SOLUCION
               i             Xi                |Xi+1 - Xi|
              ________________________________________________

              0             0.100                  0.00
              1             2.000                  0.00
              2             1.8398                 0.16021
              3             1.4468                 0.39297
              4             1.5124                 0.065618
              5             1.5054                 0.0070282
              6             1.5053                 0.0001585
              ________________________________________________
```

Solución Aproximada, x = 1.50526

Algoritmo para el método de la Secante en MATLAB

```
function raiz=secante(x1,x2)
e=0.0005;
nt=50;
k=0;
while 1
    x=x2-f1(x2)/( (f1(x2)-f1(x1) )/(x2-x1));
    fprintf('%5d%10.5f%10.5f%10.5f\n',k,x1,x2,x);
    k=k+1;
    x1=x2;
    x2=x;
    if (abs(x1-x2)<=e | k==nt)
        break;
    end

end
if k<nt
    raiz=x;
end
```

```
>> secante(0.1,1)
   0  0.10000  1.00000  1.14460
   1  1.00000  1.14460  1.43125
   2  1.14460  1.43125  1.49485
   3  1.43125  1.49485  1.50497
   4  1.49485  1.50497  1.50525

ans =

   1.5053
```