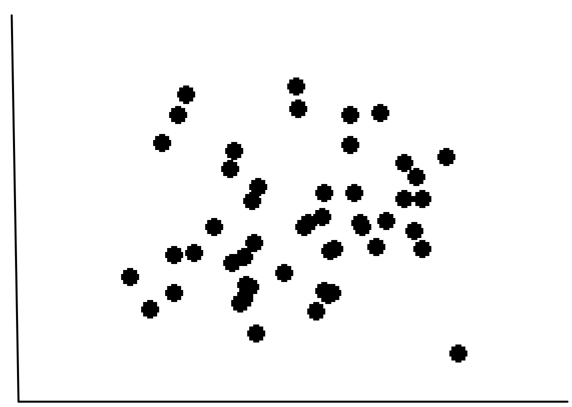
Capitulo 3

Interpolación

Introducción

En este capítulo se estudiaran técnicas para resolver el siguiente tipo de problema: hallar la expresión analítica de una función g(x) que sirva para aproximar a otra función f(x) para x en un intervalo [a, b]. Este tipo de problemas aparecen en la práctica porque no se conoce a veces una expresión analítica para la función f(x), sino valores aislados), y se necesita disponer de una expresión que permita, evaluar a la función en otros valores de x. Otras veces aunque se conoce el algoritmo algebraico para calcular f(x) resultado tan complicado que es mejor hallar una función g(x) más simple y así usarla en lugar de f(x) aunque se puede generar un error.



Ejemplo

Con el objetivo de encontrar una relación entre el peso y la talla de un determinado sector poblacional, se selecciona al azar una muestra de 100 individuos del grupo y se obtiene para cada persona i, su peso (pi) y su estatura (fi). Al representar estas mediciones en un sistema de ejes p,t se obtiene el diagrama de puntos de la siguiente figura

Para producir en un torno de mando numérico una pieza el perfil longitudinal que se muestra en la Figura. Es necesario obtener una función simple que describa el contorno de la pieza. Esta función servirá para fijar la posición de la cuchilla del torno en cada instante. Las dimensiones marcadas en la figura deber ser respetadas y el perfil de la pieza debe ser suave

El primer ejemplo representa casos en que la solución se logra mediante técnicas de ajuste de funciones, y el segundo ejemplo es una situación típica de interpolación.

Interpolación Polinomial

Si se conocen los valores que toma la función f(x) en los n+1 puntos diferentes el problema de interpolación consiste en hallar una función g(x) cuyos valores puedan ser calculados para cualquier x en un intervalo que contiene a de manera que

.

Los puntos se llaman puntos o nodos de interpolación, si x no es un valor de interpolación, se llama a g(x) un valor interpolado o extrapolado cuando x es mayor o menor al rango de nodos de interpolación. La función g(x) se conoce como función interpoladora. y es suficientemente simple como par que resulte fácil y rápido evaluarla en los puntos deseados.
A la diferencia entre f(x) y g(x) ; E(x) = f(x) - g(x) se le conoce como error de interpolación.

Ejemplo

Dada la función f(x) = sen(x), obtener su polinomio de interpolación para los nodos
– – y dar una cota del error de interpolación para x $\in$ [0, π / 2]. Con estos resultados, estimar el valor de sen(π / 6).

$$y0 = f(x0) = \text{sen } 0 = 0$$
$$y1 = f(x1) = \text{sen } \pi / 4 = 0.707107$$
$$y2 = f(x2) = \text{sen } \pi / 2 = 1$$

el polinomio de interpolación : p(x) = a x^2 +b x + c

luego p(x0) = p (0) = c = 0

$$p(x1) = p (\pi / 4) = a (\pi / 4)\text{^}2 + b (\pi / 4) + c = 0.707107$$
$$p(x2) = p (\pi / 2) = a (\pi / 2)\text{^}2 + b (\pi / 2) + c = 1$$

de donde c = 0 y

$$(\pi \text{^}2 / 16) a + (\pi / 4) b = 0.707107$$
$$(\pi \text{^}2 / 4) a + (\pi / 2) b = 1$$

por lo tanto

a = -0.335749
b = 1.164013

luego p(x) = -0.33574 9 x^ 2 + 1.164013 x

como f(x) = sen (x) es derivable indefinidamente f(3) (x) = - cos (x) se tiene que | f(3) (x) | $\leq$ 1 por lo tanto una cota del error de interpolación será

| E (x) | $\leq$ [M / (n-1) !] / | (x – x0) (x – x1) (x – x2). . . (x – x n) |
= (1/3 !) | (x – x0) (x – x1) (x – x2) |

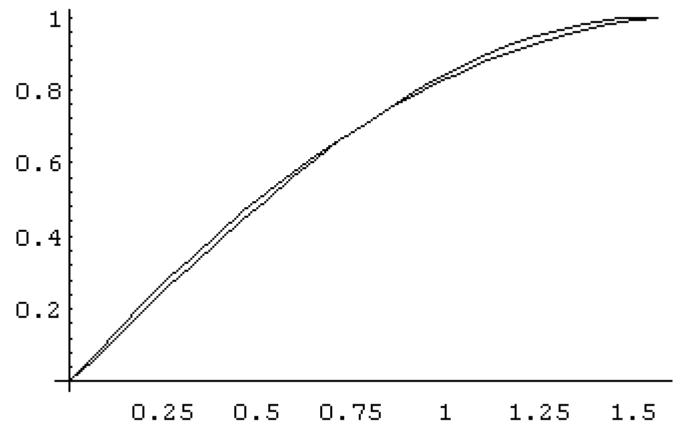
$= 1/6\ x\,(x - \pi/4)\,(x - \pi/2)\,|$
$= (1/6)\ |x^3 - 2.3562\,x^2 + 1.2337\,x|$

Para $x = \pi/6 = 0.523599$, se obtiene $p(\pi/6) = p(0.523599) = 0..5174$ con una cota $|E(\pi/6)| \le 0.0239$ y de aquí

Sen $(\pi/6) = 0.5174 \pm 0.0239$

Como se sabe $\mathrm{Sen}(\pi/6) = 0.5$, por lo tanto el verdadero error de interpolación es

$E(\pi/6) = |0.5 - 0.5174| = 0.0174$



Interpolación de Lagrange

Sean los n+1 nodos de interpolación , los cuales se suponen ordenandos en forma creciente pero no necesariamente distribuida en forma creciente.

El método de Lagrange consiste en que se cuenta con un conjunto de pares ordenados que representan puntos en un par de ejes cartesianos y se quiere buscar una función que pase por todos esos puntos.Y se obtiene el polinomio de interpolación correspondiente a los puntos (xo,yo), (x1,y1), … , (xn,yn), a partir de las n + 1 funciones siguientes:

$$f_o(x) = \frac{(x - x_1).(x - x_2).(x - x_3).\ \ldots.(x - x_n)}{(x_o - x_1).(x_o - x_2).(x_o - x_3).\ \ldots.(x_o - x_n)}$$

$$f_1(x) = \frac{(x - x_o).(x - x_2).(x - x_3).\ \ldots.(x - x_n)}{(x_1 - x_o).(x_1 - x_2).(x_1 - x_3).\ \ldots.(x_1 - x_n)}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_n(x) = \frac{(x - x_o).(x - x_1).(x - x_2).\ \ldots.(x - x_{n-1})}{(x_n - x_o).(x_n - x_1).(x_n - x_2).\ \ldots.(x_n - x_{n-1})}$$

Todos son polinomios de grado n que cumplen $f_i(x_i) = 1$; $f_i(x_j) = 0$ (si $i \neq j$), por lo que:

$$P_n(x) = y_o f_o(x) + y_1 f_1(x) + y_2 f_2(x) + \dots + y_n f_n(x)$$

será un polinomio de grado menor o igual que n que, además, cumplirá:

$$P_n(x_o) = y_o , P_n(x_1) = y_1 , \dots , P_n(x_n) = y_n$$

En consecuencia, y dado que sólo hay un polinomio de grado menor o igual que n que pase por n + 1 puntos, el anterior será el polinomio de interpolación buscado.

Ejemplo

```
METODO POLINOMIO DE INTERPOLACION DE LAGRANGE

       POLINOMIO
p(x) = 827*((X-(1960))*(X-(1970))*(X-(1980))*(X-(1990)))/((1950-(1960))*(1950-(1970))*(1950-
(1980))*(1950-(1990)))+1058*((X-(1950))*(X-(1970))*(X-(1980))*(X-(1990)))/((1960-(1950))*(1960-
(1970))*(1960-(1980))*(1960-(1990)))+1304*((X-(1950))*(X-(1960))*(X-(1980))*(X-(1990)))/((1970-
(1950))*(1970-(1960))*(1970-(1980))*(1970-(1990)))+1582*((X-(1950))*(X-(1960))*(X-(1970))*(X-
(1990)))/((1980-(1950))*(1980-(1960))*(1980-(1970))*(1980-(1990)))+1836*((X-(1950))*(X-
(1960))*(X-(1970))*(X-(1980)))/((1990-(1950))*(1990-(1960))*(1990-(1970))*(1990-(1980)))
```

Para X=1975, p(x)= 1440.79

Algoritmo para el método de Lagrange

```
function p=Lagrange(x,y,x0)
n=length(x)
l=zeros(n,1);
fprintf('    k      x        y        L\n');
for k=1:n
    prod1=1;
    prod2=1;
    for i=1:n
        if i~=k
            prod1=prod1.*(x0-x(i));
            prod2=prod2.*(x(k)-x(i));
        end
    end
    l(k)=prod1./prod2;
end
p=0;
for k=1:n
    p=p+l(k).*y(k);
    fprintf('%5d%10.6f%10.6f%10.6f\n',k,x(k),y(k),l(k));
end
```

```
>> Lagrange(x,y,1975)
n =    5
   k      x       y        L
   1     1950     827    0.023438
   2     1960    1058   -0.156250
   3     1970    1304    0.703125
   4     1980    1582    0.468750
   5     1990    1836   -0.039063
```

ans = 1.4408e+003

Interpolación de Newton

Sea f(x) una función dada en forma tabular o compleja, se considera que

Donde

Se pueden obtener los coeficientes resolviendo el sistema:

Tabla de diferencias divididas

El Polinomio sería

Ejemplo

Con los siguientes valores , interpolar para x=0.5236

```
                         METODO POLINOMIO DE INTERPOLACION DE LAGRANGE

       POLINOMIO
p(x) = 0*((X-(0,7854))*(X-(1,5708)))/((0-(0,7854))*(0-(1,5708)))+0,707107*((X-(0))*(X-
(1,5708)))/((0,7854-(0))*(0,7854-(1,5708)))+1*((X-(0))*(X-(0,7854)))/((1,5708-(0))*(1,5708-
(0,7854)))
```

Para X=0,5236, p(x)= 0,52

```
              METODO DE INTERPOLACION DE DIFERENCIAS DIVIDIDAS

       TABLA DE DIFERENCIAS DIVIDIDAS

              K             X             f(X)          d2f(x)        d3f(x)
              0.00          0.00          0.00          0.90032       -0.33575
              1.000         0.7854        0.70711       0.37292       0.00
              2.000         1.5708        1.000         0.00          0.00


Polinomio resultante
p(x) = 0+0.90032*(X-(0))-0.33575*(X-(0))*(X-(0.7854))
```

Para X = 0.5236, p(0.5236) =0.51743