Capitulo 2

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Conceptos Iniciales

Se tiene un sistema de ecuaciones cuadrado (n = m) de la forma

$$a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n = b_1$$

$$a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n = b_2$$

$$a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + \ldots + a_{3n}\,x_n = b_3$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \ldots + a_{mn}\,x_n = b_m$$

Representado en el sistema matricial

$$A\,X = B$$

Métodos Iterativos

Se parte de una aproximación inicial a la solución del sistema, y luego se va generando nuevas aproximaciones que serán cada vez mejores si se cumplen ciertas condiciones.

Cuando el número de variables de los sistemas a resolver es elevado (por ejemplo, arriba de 100) los métodos directos no resultan prácticos y se recurre a los métodos iterativos, en esta sección presentaremos dos métodos clásicos fundamentales.

Método de Jacobi

Sea A X = B un sistema de n ecuaciones. El sistema es cuadrado y de solución única. El sistema se puede escribir de la siguiente manera

$$X = M\,X + C$$

Con el siguiente procedimiento

Sea $X^{(0)}$ una aproximación inicial a la solución del sistema
Sea k = 1
DO WHILE no se cumpla la condición de parada
$X^{(k)} = M\ X^{(k-1\,0)} + C$
Incrementar k
END

Ejemplo

a) $10x1 - x2 + 2x3 = 6$

$x1 - 5x2 + x3 = -10$

$2x1 - x2 + 8x3 = -8$

b) $10x1 + 8x2 - 7x3 = -3$

$-3x1 + 10x2 + x3 = -25$

$5x1 - x2 + 10x3 = 22$

c) $4x1 - 3x2 + 5x3 = 25$

$3x1 + 2x2 + 2x3 = 11$

$4x1 - 2x2 + 3x3 = -4$

Convergencia del método

No siempre el método da una sucesión convergente hacia la solución del sistema. Para esto se utiliza un factor de convergencia

Factor de Convergencia

Sea el sistema X = M X + C . Se llamará factor de convergencia de M para el método de Jacobi al número α definido por

$$\alpha = \text{máx} \Sigma | m_{ij} | \qquad ; \qquad j : 1, n$$

0 0.1 – 0.2

$$M = \begin{matrix} 0.2 & 0 & 0.2 \\ -0.25 & 0.125 & 0 \end{matrix}$$

Para $i = 1$ $\text{máx} \sum | m_{ij} | = 0 + 0.1 + 0.2 = 0.3$

Para $i = 2$ $\text{máx} \sum | m_{ij} | = 0.2 + 0 + 0.2 = 0.4$

Para $i = 3$ $\text{máx} \sum | m_{ij} | = 0.25 + 0.125 + 0 = 0.375$

Por lo tanto

$$\alpha = \text{máx} \sum | m_{ij} | = \text{máx} \{ 0.3, 0.4, 0.375 \} = 0.4$$

Ejemplo 2

$$M = \begin{matrix} 0 & -0.8 & 0.7 \\ 0.3 & 0 & -0.1 \\ -0.5 & 0.1 & 0 \end{matrix}$$

Por lo tanto

$$\alpha = \text{máx} \sum | m_{ij} | = \text{máx} \{ 1.5, 0.4, 0.6 \} = 1.5$$

Teorema

Sea el sistema cuadrado AX = B. Una condición suficiente para que el método de Jacobi sea convergente para el sistema, es que A tenga la diagonal predominante.

$$| a_{ii} | > | a_{i1} | + | a_{i2} | + \ldots + | a_{in} |$$

es decir

$$| m_{i1} | + | m_{i2} | + \ldots + | m_{in} | < 1$$

lo cual significa que

$$\alpha < 1$$

Criterio de Parada

Para obtener la solución de un sistema lineal X = M X + C mediante el método de Jacobi con error absoluto menor que E. El proceso iterativo se debe detener en la aproximación X (k) para la cual

$$[\alpha \ / (1 - \alpha)] \, \delta^{(k)} \leq E$$

donde

$$\delta^{(k)} = \text{máx} \{ \, | d_i^{(k)} | \, \}$$

$$d = | X^{(k)} - X^{(k-1)} |$$

$$\delta^{(k)} \leq E * [(1 - \alpha) / \alpha]$$

Algoritmo para el método de Jacobi

```
function x=jacobi(A,b);
[n,n]=size(A);
x=zeros;
y=zeros;
e=0.0005;
nt=50;
k=0;
fprintf('%5d',k);
for m=1:n
    fprintf('%10.5f',x(m));
end;
while 1
    f=1;
    for i=1:n
        s=0;
        for j=1:n
            if i~=j
                s=s+A(i,j)*x(j)/A(i,i);
            end
        end
        y(i)=b(i)/A(i,i)-s;
    end
    k=k+1;
    fprintf('\%10.5f',k);
    for i=1:n
        if abs(y(i)-x(i))<e
            f=0;
        end
        x(i)=y(i);
        fprintf('\%10.5f',x(i));
    end
    if (nt==k)|(f==1)
        break
    end
end
```

```
>> jacobi(a,b)
   0   0.00000   0.00000   0.00000
   1  -1.50000   3.00000  -0.25000
   2  -2.93750   3.41667  -1.75000
   3  -2.77083   3.39583  -1.65104
   4  -2.78516   3.37326  -1.67969
   5  -2.76671   3.36849  -1.66200
   6  -2.76874   3.36824  -1.66363
   7  -2.76821   3.36837  -1.66296
   8  -2.76845   3.36842  -1.66318
ans =

  -2.7684
   3.3684
  -1.6632
```

Ejemplo

a)

$$
\begin{aligned}
10x1 - x2 + 2x3 &= 6 \\
x1 - 5x2 + x3 &= -10 \\
2x1 - x2 + 8x3 &= -8
\end{aligned}
$$

METODO DE JACOBI

MATRIZ AUMENTADA

10.00	-1.00	2.000	6.000
1.000	-5.00	1.000	-10.0
2.000	-1.00	8.000	-8.00

i	X0	X1	X2	ERROR
0	0.00	0.00	0.00	0.00
1	0,6.0	2.000	-1.00	2.000
2	1.000	1,92	-0,9	0,4.0
3	0,972	2,02	-1,01	0,11
4	1,004	1,9924	-0,9905	0,032
5	0,99734	2,0027	-1,002	0,01145
6	1,0007	1,9991	-0,999	0,003622
7	0,99971	2,0003	-1,0003	0,0012828
8	1,0001	1,9999	-0,99989	0,00044709
9	0,99997	2.000	-1.00	0,0001554
10	1.000	2.000	-0,99999	5,5019E-5

Solucion

X0 = 1;X1 = 2;X2 = -0,99999;

METODO DE GAUSS SEIDEL

MATRIZ AUMENTADA

10.00	-1.00	2.000	6.000

1.000	-5.00	1.000	-10.0
2.000	-1.00	8.000	-8.00

i	X0	X1	X2	ERROR
0	0.00	0.00	0.00	0.00
1	0,6.0	2,12	-0,885	2,12
2	0,989	2,0208	-0,99465	0,389
3	1,001	2,0013	-1,0001	0,019528
4	1,0001	2.000	-1.00	0,0012615
5	1.000	2.000	-1.00	0,00013782
6	1.000	2.000	-1.00	8,0832E-6

X0 = 1;X1 = 2;X2 = -1;

b) $10x1 + 8x2 - 7x3 = -3$

$-3x1 + 10x2 + x3 = -25$

$5x1 - x2 + 10x3 = 22$

METODO DE JACOBI

MATRIZ AUMENTADA

10.00	8.000	-7.00	-3.00
-3.00	10.00	1.000	-25.0
5.000	-1.00	10.00	22.00

i	X0	X1	X2	ERROR
0	0.00	0.00	0.00	0.00
1	-0,3	-2,5	2,2.0	2,5.0
2	3,24	-2,81	2,1.0	3,54
3	3,418	-1,738	0,299	1,801
4	1,2997	-1,5045	0,3172	2,1183
5	1,1256	-2,1418	1,3997	1,0825
6	2,3932	-2,3023	1,423	1,2676
7	2,5379	-1,9243	0,77315	0,64985
8	1,7807	-1,8159	0,73861	0,75725
9	1,6698	-2,0397	1,1281	0,38946
10	2,1214	-2,1119	1,1611	0,4516
11	2,2023	-1,9797	0,92812	0,23302
12	1,9334	-1,9321	0,90088	0,26885
13	1,8763	-2,0101	1,0401	0,13919
14	2,0361	-2,0411	1,0608	0,15977
15	2,0755	-1,9953	0,97784	0,082993
16	1,9807	-1,9751	0,96274	0,094779
17	1,954	-2,0021	1,0121	0,049401
18	2,0101	-2,015	1,0228	0,056119
19	2,0279	-1,9992	0,99343	0,029354
20	1,9948	-1,991	0,9861	0,033165
21	1,983	-2,0002	1,0035	0,01741
22	2,0026	-2,0054	1,0085	0,019561
23	2,0103	-2,0001	0,99816	0,010307
24	1,9988	-1,9967	0,99485	0,011513
25	1,9938	-1,9999	1,0009	0,00609
26	2,0005	-2,002	1,0031	0,006762
27	2,0038	-2,0001	0,99953	0,0035913
28	1,9998	-1,9988	0,99811	0,0039626

29	1,9977	-1,9999	1,0002	0,0021134
30	2,0001	-2,0007	1,0011	0,0023167
31	2,0014	-2,0001	0,9999	0,0013066
32	2.000	-1,9996	0,99931	0,001351
33	1,9992	-1,9999	1.000	0,00082796
34	2.000	-2,0002	1,0004	0,00078577
35	2,0005	-2,0001	0,99999	0,00052244
36	2.000	-1,9999	0,99975	0,00045573
37	1,9997	-2.00	1.000	0,0003284
38	2.000	-2,0001	1,0002	0,00026351
39	2,0002	-2.00	1.000	0,0002057
40	2.000	-1,9999	0,99991	0,00015187
41	1,9999	-2.00	0,99999	0,00012842
42	2.000	-2.00	1,0001	8,7213E-5

Solucion

X0 = 2;X1 = -2;X2 = 1,0001;

METODO DE GAUSS SEIDEL

MATRIZ AUMENTADA

10.00	8.000	-7.00	-3.00
-3.00	10.00	1.000	-25.0
5.000	-1.00	10.00	22.00

i	X0	X1	X2	ERROR
0	0.00	0.00	0.00	0.00
1	-0,3	-2,59	2,091	2,59
2	3,2357	-1,7384	0,40831	3,5357
3	1,3765	-2,1279	1,2989	1,8592
4	2,3116	-1,9364	0,85058	0,93503
5	1,8445	-2,0317	1,0746	0,46702
6	2,0775	-1,9842	0,96281	0,233
7	1,9613	-2,0079	1,0186	0,11623
8	2,0193	-1,9961	0,99075	0,057975
9	1,9904	-2,002	1,0046	0,028919
10	2,0048	-1,999	0,9977	0,014425
11	1,9976	-2,0005	1,0011	0,0071953
12	2,0012	-1,9998	0,99943	0,0035891
13	1,9994	-2,0001	1,0003	0,0017903
14	2,0003	-1,9999	0,99986	0,000893
15	1,9999	-2.00	1,0001	0,00044543
16	2,0001	-2.00	0,99996	0,00022219
17	2.000	-2.00	1.000	0,00011083
18	2.000	-2.00	0,99999	5,5282E-5

X0 = 2;X1 = -2;X2 = 0,99999;

c)
$$\begin{aligned} 4x1 - 3x2 + 5x3 &= 25 \\ 3x1 + 2x2 + 2x3 &= 11 \\ 4x1 - 2x2 + 3x3 &= -4 \end{aligned}$$

Sistema que no tiene diagonal predominante , no se puede encontrar la solución.

METODO DE JACOBI

MATRIZ AUMENTADA

4.000	-3.00	5.000	25.00
3.000	2.000	2.000	11.00
4.000	-2.00	3.000	-4.00

i	X0	X1	X2	ERROR
0	0.00	0.00	0.00	0.00
1	6,25	5,5.0	-1,3333	6,25
2	12,042	-2,5417	-6.00	8,0417
3	11,844	-6,5625	-19,083	13,083
4	25,182	6,8177	-21,5	13,38
11	213,72	-60,641	-181,41	82,521

12	187,53	-133,68	-326,72	145,32
13	314,4	50,934	-340,49	184,61
14	470,06	-125,61	-386,57	176,54
15	395,26	-313,01	-711,82	325,24
16	661,26	124,43	-737,02	437,44
17	1020,8	-249,37	-800,06	373,79
18	819,3	-725,71	-1528,7	728,65
19	1372,9	305,26	-1577,5	1031
20	2207,1	-476,24	-1628,3	834,27
21	1684,4	-1676,9	-3261,7	1633,4
22	2825,7	740,48	-3365,2	2417,4
23	4768,1	-867,8	-3275,2	1942,4
24	**3449,4**	**-3871,4**	**-6937,3**	**3662,1**

METODO DE GAUSS SEIDEL
MATRIZ AUMENTADA

4.000	-3.00	5.000	25.00
3.000	2.000	2.000	11.00
4.000	-2.00	3.000	-4.00

i	X0	X1	X2	ERROR
0	0.00	0.00	0.00	0.00
1	6,25	-3,875	-12,25	12,25
2	18,656	-10,234	-33,031	20,781
3	39,863	-21,264	-68,66	35,629
4	76,127	-40,031	-129,52	60,864
11	3720,9	-1928,7	-6248,4	2601,1
12	6370,2	-3301,4	-10696	4447,5
13	10900	-5648,7	-18301	7604,6
14	18645	-9662,1	-31303	13003
15	31889	-16524	-53536	22233
16	54533	-28258	-91551	38015
17	93251	-48320	-1,5655E5	64999
18	1,5945E5	-82624	-2,6769E5	1,1114E5
19	2,7265E5	-1,4128E5	-4,5772E5	1,9003E5
20	4,6619E5	-2,4157E5	-7,8264E5	3,2492E5
21	7,9713E5	-4,1305E5	-1,3382E6	5,5557E5
22	1,363E6	-7,0625E5	-2,2881E6	9,4993E5
23	2,3305E6	-1,2076E6	-3,9124E6	1,6242E6
24	3,9848E6	-2,0648E6	-6,6896E6	2,7772E6
25	6,8134E6	-3,5305E6	-1,1438E7	4,7486E6

Mathematica

LinearSolve[{{10,-1,2},{1,-5,1},{2,-1,+8}},{6,-10,-8}]

Solución {1, 2, -1}

Mal Condicionamiento

Los sistemas mal condicionados, son sistemas inestables que trabajan mejor con la aplicación de métodos numéricos.

Con estos sistemas ante el menor cambio en uno de los elementos de la matriz, se obtiene una solución, en algunos casos radicalmente diferente a la solución exacta.

A pesar de que tienen una única solución, se puede observar en su interpretación geométrica, que sus planos parecen ser paralelos, porque resulta difícil ver, donde se cortan.

La solución es trabajar con una mejor precisión, con doble o mayor, es por esta razón que los métodos numéricos trabajan mejor con estos sistemas.

Para detectar cuando un sistema es mal condicionado, existen varias pruebas,

- Un ligero cambio de los coeficientes o elementos de la matriz provoca cambios significativos en la solución
- La matriz no tiene diagonal predominante
- Det(A) * Det (A-1) difiere significativamente de 1
- A * A-1 es muy distinto a la matriz **I**

EJEMPLOS

Sea Ax = b un sistema de ecuaciones lineales, se resuelve de la siguiente manera

EN MATLAB

```
a=[0.12065 0.98775;0.12032 0.98755]
```

```
a =    0.1206    0.9878

       0.1203    0.9876
```

```
b=[2.01045;2.00555]
```

```
b =     2.0104

        2.0056
```

```
» x=a\b                          % Solución del sistema
```

```
x =      14.7034

         0.2394
```

```
» b=[2.01145;2.00555]          % Si se hace un cambio en b
```

```
b =     2.0114

        2.0056
```

```
» x=a\b                        % La solución difiere de la anterior
```

```
x =    17.9753

       -0.1592
```

Ejemplo

Definir el sistema Ax=b >>a=[0.12065,0.98775;0.12 032,0.98755] >> b=[2.01045;2.00555]	a = 0.120650000000000 0.987750000000000 0.120320000000000 0.987550000000000 b = 2.010450000000000 2.005550000000000 >>
Encontrar la solución x=inv(a)*b	x = 14.703381898601037 0.239419867308357
Realizar un pequeño cambio >> b1=[2.01145;2.00555]	b1 = 2.011450000000000 2.005550000000000
Encontrar la solución >> x=inv(a)*b1 Solución obtenida es distinta a la anterior	x = 17.975283895601933 -0.159218427744236
Calcular >> inv(a)*a	ans = 0.999999999999943 0 0.000000000000007 1.000000000000000 >>
Calcular el det(a) >> det(a) Tiende a cero	ans = 3.018275000000071e-004
Calcular el condicional >> cond(a) Es grande	ans = 6.559834156558525e+003
Calcular >> det(a)*det(inv(a)) Tiende a 1	ans = 0.999999999999981