Capitulo 1

Teoría de Errores

Introducción

Las ciencias experimentales se fundamentan en la experiencia, y en la precisión de las medidas. La acción de medir implica comparar la magnitud del objeto de medida con un patrón y el resultado obtenido se expresa con un número y una unidad, dependiendo esta última del patrón que se haya escogido.

Al realizar una medida generalmente nunca se obtiene el "verdadero valor" de lo que se ha medido. Y eso se debe a varias razones, que pueden ser las imperfecciones de los aparatos y de nuestros sentidos. Por esta razón cuando se realizan mediciones es mejor hablar de estimaciones, medidas o aproximaciones del valor de una magnitud.

Entonces toda medida lleva consigo cierto grado de incertidumbre, que en realidad es el error de medición, el conocer esta incertidumbre aumenta la información sobre lo medido, además de ayudar a tomar mayores consideraciones en las decisiones a tomar. Para expresar el resultado de una medida , se utilizan tres elementos: número, unidad e incertidumbre o error.

Concepto de errores

El significado de la palabra "error" no es muy preciso, se lo puede considerar como una estimación o cuantificación de la incertidumbre de una medida. Cuanto más incierta sea una medida, tanto mayor será el error de medición

TIPOS DE ERRORES CON LA COMPUTADORA

Al trabajar con la computadora utilizando métodos numéricos definidos en base a un modelo matemático aparecen errores conocidos como "error de truncamiento" y "error de redondeo".

ERROR DE TRUNCAMIENTO Y REDONDEO

Este error se comete al sustituir un proceso de cálculo infinito o infinitesimal por uno finito, mientras que el error de redondeo se produce al representar y luego operar los números con menos cifras que las que realmente poseen. Este tipo de error ocurre al trabajar con una calculadora o con una computadora debido a la capacidad finita de su memoria, pero también está presente al efectuar cálculos manuales aproximados.

REDONDEO DE NÚMEROS.

Todos los números resultantes de una medida tienen cierto error. Por esto es necesario eliminar de estos números cifras que carecen de significado porque el error es mayor que lo que estas cifras significan.

Las reglas del redondeo de números son las siguientes:

Si la cifra que se omite es menor que 5, se elimina sin más
Si la cifra eliminada es mayor que 5, se aumenta en una unidad la última cifra retenida.
Si la cifra eliminada es 5, se toma con última el número par más próximo; es decir, si la cifra retenida es par se deja, y si es impar se toma la cifra superior.

Algunos ejemplos

Si redondeamos 3.678 a tres cifras significativas, el resultado es 3.68, que esta más cerca de 3.67.
En cambio, si redondeamos a tres cifras significativas 3.673, quedaría 3.67 .
Si tomamos 3.675, según la tercera regla, debemos dejar 3.68

Las dos primeras reglas son de sentido común, la tercera es un convenio razonable ya que si se sigue, la mitad de las veces redondeamos por defecto y la mitad por exceso.

Efectos de los errores de redondeo

Si se suman o restan números, la representación exacta del resultado quizá necesite un número de dígitos mucho mayor que el necesario para los números sumados o restados. Existen dos situaciones como a) cuando se suma (o se resta) un número muy pequeño de uno muy grande y b) cuando un número se resta de otro que es muy cercano.

ERROR ABSOLUTO

Por motivos obvios, y por su propia naturaleza, no es posible determinar exactamente un error. En el mejor de los casos puede llegarse a una estimación de ese error. Cuando el resultado de una medida se expresa por:

> Sea X un número real cualquiera, XA otro número real cercano a X y E la diferencia entre X y XA . Sea E A el valor absoluto de E; es decir $E = X - XA$; $EA = |E| = | X - XA|$. Por lo tanto, una medida se puede expresar: $X \pm EA$ (unidad) ó (X –EA , X + EA)

Lo que se quiere decir es que XA es un número aproximado a X con un error E o con un error absoluto EA. Se denota $XA \approx X$ si en una operación cualquiera donde aparece X, este se sustituye por XA, se dice que se ha realizado una aproximación en la cual se comete un error E o un error absoluto EA.

Es evidente que el error expresado por el error absoluto es una magnitud de la misma clase que la medida y se expresa por tanto con la misma unidad. También es claro que en las medidas de calidad normal el error deber ser mucho menor que el valor nominal, X. Por definición es siempre positivo.

Si XA X se dice que la aproximación es por defecto y se denota XA- . Por el contrario, si XA X se dice que es una aproximación por exceso, y se denota XA+

También es importante juzgar si dada una aproximación, esta es apropiada o no. El error absoluto no permite resolver este problema pues la medición tiene que ser relativa.

<u>Ejemplo.</u> Sea

X 1= 4545	X1A = 4500	E1 =45	E1A= 45
X 2 = 0.333333...	X2A = 0.3	E2 =0.033333...	E2A= 0.033333

ERROR RELATIVO

El error relativo ER de un número XA, aproximado a un número X, se define como el cociente del error absoluto, dividido por |X|.

O también puede ser expresado en por ciento

En el ejemplo

$X_1 = 4545$	$X_{1A} = 4500$	$E_1 = 45$	$E_{1R} = 0.99\%$
$X_2 = 0.333333...$	$X_{2A} = 0.3$	$E_2 = 0.033333...$	$E_{2R} = 10\%$

Se puede concluir que X1A es una buena aproximación porque tiene un error relativo pequeño, además es la mejor de las dos aproximaciones examinadas, a pesar de tener un error absoluto grande.

CIFRAS SIGNIFICATIVAS

Se considera que las cifras significativas de un número son aquellas que tienen significado real o aportan alguna información. Las cifras no significativas aparecen como resultado de los cálculos y no tienen significado alguno. Las cifras significativas de un número vienen determinadas por su error. Son cifras significativas aquellas que ocupan una posición igual o superior al orden o posición del error.

CONJUNTOS NUMÉRICOS REPRESENTABLES EN COMPUTADORAS

Cuando se resuelve un problema matemático por medio de una calculadora, los números decimales que se calculan quizá no sean exactos. Estos números casi siempre se redondean cuando los registramos. El número limitado de la calculadora puede provocar errores de redondeo. En una computadora, los errores de redondeo aparecen por las mismas razones y afectan los resultados de los cálculos. A veces, estos errores causan efectos muy serios y hacen que resultados carezcan de sentido. Por lo tanto es importante comprender en que circunstancias ocurren severos errores de redondeo.

Rango de Constantes Numéricas

Las constantes numéricas que se usan en un programa se clasifican en tres categorías. A) enteros B) reales C) números complejos.

La menor y la mayor magnitud de un número real que se pueden representar en una computadora varían de acuerdo al diseño tanto del hardware como del software

Cantidad de bits	Rango (Positivo)	# Cifras Sig. (precisión)
32 (4 bytes)	$1.5 * 10^{-45}$ a $3.4 * 10^{38}$	7 - 8
48 (6 bytes)	$2.9 * 10^{-39}$ a $1.7 * 10^{39}$	11 - 12
64 (8 bytes)	$5.0 * 10^{-324}$ a $1.7 * 10^{308}$	15 - 16
80 (10 bytes)	$3.4 * 10^{-4932}$ a $1.1 * 10^{4932}$	19 - 20

Los números reales en una computadora no son continuos. Entre los números más cercanos al cero tenemos, al número más pequeño para 6 bytes es $2.9*10^{-39}$ hasta $1.7 * 10^{39}$. Para esta cantidad de bits, la diferencia entre 1 y el menor número mayor que 1 (pero distinguible de 1) es de $1.19 * 10^{-7}$. Este intervalo se llama épsilon de la máquina. El intervalo entre cualquier número real y el siguiente es igual a (ε de la máquina) * R, donde R es el número real.

Este ε, es el tamaño del intervalo entre 1 y el siguiente número mayor que 1 distinguible de 1. Es decir, que ningún número entre 1 y $1 + \varepsilon$ se puede representar en la computadora. En el caso de cualquier número $1 + \alpha$ se redondea a 1 si $0 < \alpha < \varepsilon/2$ es el máximo error posible de redondeo para 1. Cuando se halla 1.0 en la memoria de la computadora, el valor original pudo ser alguno entre $1 - \varepsilon/2 < x\ 1+ \varepsilon/2$.

El ε de la máquina se puede representar mediante el siguiente programa

```
%Cálculo del épsilon de la máquina.
x=1;
while 1+x>1
   x=x/2;
end
x=2*x;
disp('El épsilon de la máquina es')
disp(x)
disp('El valor de 2^(-52) es')  % Comprobación
disp(2^(-52))
```

Epsilon: 0.000000000000000000542101086242752217000

El error de redondeo implicado en el almacenamiento de cualquier número real R en memoria es aproximadamente igual a $\varepsilon R/2$, si el número se redondea por exceso y εR si se redondea por defecto.

EXACTITUD Y PRECISIÓN.

La exactitud se refiere a que tan cercano está el valor calculado o medido del valor verdadero. La precisión se refiere a qué tan cercano está un valor individual medido o calculado respecto a los otros.

La inexactitud se define como un alejamiento sistemático de la verdad. La imprecisión, sobre el otro lado, se refiere a la magnitud del esparcimiento de los valores.

Los métodos numéricos deben ser lo suficientemente exactos o sin sesgos para que cumplan los requisitos de un problema particular .

APROXIMACION POR SERIES DE TAYLOR

Una especial atención tiene la aproximación de funciones por la utilización de series de expansión de Taylor. Así, si una función es continua y diferenciable dentro del intervalo de interés, puede ser escrita como una serie de potencia finita, o serie de Taylor.

Este método no puede, sin embargo, usarse para ajustar datos experimentales [Xi , f(xJ], sino que para transformar funciones ya conocidas y diferenciables a unas de más fácil manejo.

Existen ciertas observaciones que deben conocerse al aplicar esta fórmula. Por ejemplo, para tener una mejor aproximación de la función a un intervalo [a, b], el valor de Xo debe elegirse lo más cercano posible al centro de dicho intervalo. De esta manera se minimiza la contribución máxima del término (X-Xo)n+l del residuo en el cálculo de R(x) entre a < = x < = b.

Otra forma de minimizar el valor del residuo es elevar el grado del polinomio de ajuste, o sea incluir más términos en la serie y reducir así el exponente de R(x).